Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Etapa finală, Piteşti

11 aprilie 2007

CLASA A VIII-A, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Subiectul 1. Să se arate că numărul 10^{10} nu poate fi scris ca produsul a două numere naturale a căror reprezentare zecimală să nu conţină cifra 0.

Soluţie şi barem de corectare. Presupunem prin absurd contrariul şi fie a şi b cei 2 factori. Unul dintre factori este par; fie acesta a. Dacă 5 divide a, atunci ultima cifră va fi 0, contradicţie. .... 3 puncte

Rezultă că 5^{10} divide b; dacă şi b este par atunci ultima sa cifră e 0, fals. Rămâne doar cazul $a = 2^{10}$ şi $b = 5^{10}$. Cum $2^{10} = 1024$, a conţine cifra 0, contradicţie. .... 4 puncte

Subiectul 2. Într-o clădire sunt 6018 birouri în 2007 camere, iar în fiecare cameră se află măcar un birou. Orice cameră poate fi golită distribuind birourile în celelalte camere astfel încât în acestea să fie un număr egal de birouri. Să se determine modurile în care sunt dispuse birourile în clădire.

Soluţie şi barem de corectare.

Fie n numărul maxim de birouri dintr-o cameră. Avem $n \geq 3$, deoarece dacă $n \leq 2$ avem $6018 \leq 2007 \cdot n = 4014$, fals. .... 1 punct

Dacă $n \geq 4$ alegem o altă cameră pe care o golim. După redistribuire, în camerele pline sunt măcar n birouri, de unde $6018 \geq 2006 \cdot n \geq 2006 \cdot 4 = 8024$, contradicţie. Rezultă $n = 3$. .... 2 puncte

Să observăm că $6018 = 3 \cdot 2006$, deci lipsesc 3 birouri pentru ca în toate camerele să fie exact 3 birouri. Atunci:

a) Dacă există o cameră cu exact un birou, distribuţia poate fi doar 1,2,3,...,3. .... 1 punct

Pentru a îndeplini cerinţa, observăm că prima cameră se mută în a doua, a doua în prima şi oricare din cele cu 3 birouri se mută 2 birouri în prima şi 1 birou în a doua, în toate cazurile configuraţia rezultată având 3 birouri în celelalte camere. .... 1 punct

b) Dacă nu există o cameră cu doar un birou, distribuţia va fi 2,2,2,3,...,3. 1 punct

Oricare din primele 3 camere se distribuie egal în celelalte 2 cu câte 2 birouri, iar camerele cu 3 birouri se golesc ducând câte 1 birou în camerele cu 2 birouri. .... 1 punct

În concluzie există 2 moduri în care pot fi dispuse iniţial birourile în clădire.

Subiectul 3. a) Într-un triunghi MNP, lungimile laturilor sunt mai mici decât 2. Arătaţi că lungimea înălţimii corespunzătoare laturii MN este mai mică decât $\sqrt{4-\frac{MN^2}{4}}$.

b) Într-un tetraedru $ABCD$, cel puţin 5 muchii au lungimi mai mici decât 2. Arătaţi că volumul tetraedrului este mai mic decât 1.

Soluţie şi barem de corectare. a) Fie PQ mediana corespunzătoare laturii MN.

Avem $PQ^2 = \dfrac{2(PM^2+PN^2)-MN^2}{4} < 4 - \dfrac{MN^2}{4}$............ 2 puncte

Cum înălţimea este cel mult egală cu mediana, rezultă cerinţa... 1 punct

b) Fie $CD = a < 2$ şi fie AB muchia ce nu este în mod necesar mai mică decât 2. Notăm cu M proiecţia lui B pe CD. În triunghiul BCD laturile sunt mai mici ca 2, deci $BM < \sqrt{4-\frac{a^2}{4}}$. Analog, înălţimea din A în triunghiul ACD este mai mică decât $\sqrt{4-\frac{a^2}{4}}$, deci şi înălţimea h din A în tetraedru este mai mică decât $\sqrt{4-\frac{a^2}{4}}$. Atunci $V[ABCD] = \frac{1}{3}\cdot h\cdot S[BCD] < \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot a\cdot(4-\frac{a^2}{4}) = \frac{a(16-a^2)}{24}$ .... 2 puncte

Rămâne de arătat că $a(16-a^2) \le 24$. Cum $a^3-16a+24 = (a-2)(a^2+2a-12)$ şi $a<2$, $a^2+2a<4+4<12$ cerinţa rezultă............. 2 puncte

Subiectul 4. Fie $ABCD$ un tetraedru. Demonstraţi că dacă un punct M din spaţiu satisface relaţia $MA^2+MB^2+CD^2 = MB^2+MC^2+DA^2 = MC^2+MD^2+AB^2 = MD^2+MA^2+BC^2$, atunci aparţine perpendicularei comune a dreptelor AC şi BD.

Soluţie şi barem de corectare.

Din ipoteză avem $MA^2-MC^2 = DA^2-DC^2 = BA^2-BC^2 \overset{not}{=} x$. ...1 punct

Notăm M_1, D_1, B_1 proiecţiile punctelor M, B, C pe dreapta AC. Atunci $x = M_1A^2 - M_1C^2 = D_1A^2 - D_1C^2 = B_1A^2 - B_1C^2$, de unde rezultă $M_1 = D_1 = B_1$, adică M, B, D aparţin unui plan perpendicular α pe dreapta AC.. 2 puncte

Analog, din $MB^2-MD^2 = CB^2-CD^2 = AB^2-AD^2$ rezultă că M, A, C aparţin unui plan β perpendicular pe dreapta BD................. 2 puncte

Planele α şi β au punctul M comun şi nu coincid, deoarece dreptele AC şi BD nu sunt paralele.. 1 punct

Dreapta lor comună - ce trece prin punctul M - este perpendiculara comună a dreptelor AC şi BD, ceea ce trebuia arătat...................... 1 punct